Equation de la chaleur (par les séries de Fourier)

Leçons : 209, 222, 241, 246

Réf. : Zuily, Queffélec, Analyse pour l'agrégation p106 (4e éd.) (existence)

Exercice :

Soit $Q =]0, \pi[\times]0, +\infty[$ et $\overline{Q} = [0, \pi] \times [0, +\infty[$. On cherche u telle que :

(1) $u \in \mathcal{C}^0(\overline{Q})$ et $u \in \mathcal{C}^2(Q)$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \quad \forall (x,t) \in Q$

(3) $u(0,t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[$

(4) $u(x,0) = h(x) \quad \forall x \in [0,\pi]$ où $h \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ et $h \not\equiv 0$.

Il existe alors une unique application u vérifiant ces conditions

Existence :

1) Méthode de séparation des variables

On cherche u sous la forme $u(x,t) = f(x) g(t)$.

Notons que $u(\cdot, 0) = h$ donc u n'est pas identiquement nulle.

Supposons que f et g ne s'annulent pas sur $]0,\pi[$ et $]0,+\infty[$.

Alors $(2) \iff \dfrac{f''(x)}{f(x)} = \dfrac{g'(t)}{g(t)} \quad \forall (x,t) \in Q$

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ /

$$f''(x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in]0,\pi[\quad (a)$$
$$g'(t) = \lambda g(t) \quad \forall t \in]0,+\infty[. \quad (b)$$

2) Discussion selon la valeur de λ

a/ $\lambda > 0$

(a) $\Rightarrow f(x) = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$

(3) $\Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A e^{\sqrt{\lambda}\pi} + B e^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ absurde

b/ $\lambda = 0$

(a) $\Rightarrow f(x) = Ax + B$

(3) $\Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A\pi + B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ absurde

c/ $\lambda = -\xi^2 < 0$

(b) $\Rightarrow g(t) = C e^{-\xi^2 t}$

(a) $\Rightarrow f(x) = A\cos(\xi x) + B\sin(\xi x)$

(3) $\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \underbrace{B}_{\neq 0 \text{ car } u \neq 0} \sin(\xi\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \xi = n,\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

On a donc une famille de solutions :

$$\boxed{\left\{ u_n(x,t) = b_n \sin(nx)\, e^{-n^2 t},\ b_n \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{Z} \right\}}$$

3) Analyse

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, u_n est solution de (2), mais il n'y a aucune raison pour laquelle $h(x) = b_n \sin(nx)$.
- Une somme finie de u_n vérifie toujours (2), mais à nouveau aucune raison pour qu'elle coïncide avec h en $t = 0$.
- L'idée est donc de chercher une solution sous la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u$ telle que :
  - $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) = h(x) \quad \forall x \in [0,\pi]$ (inconnues $= b_n$)
  - u vérifie (1) et (2) (interversion $\sum$ et dérivées partielles)

Ⓐ

4) Synthèse

Soit $\tilde{h}$ le prolongement impair, 2π-périodique de h,

i.e. $\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x) & \forall x \in [0,\pi] \\ -h(-x) & \forall x \in [-\pi,0] \\ \tilde{h} \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \end{cases}$

$h \in \mathcal{C}^1([0,\pi])$ et $h(0) = h(\pi) = 0$ donc $\boxed{\tilde{h} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})}$

Par corollaire du théorème de Fejér, la série de Fourier de $\tilde{h}$ converge normalement donc uniformément vers $\tilde{h}$, et ses coefficients réels sont :

- $\forall n \geq 0$, $a_n(\tilde{h}) = 0$ car $\tilde{h}$ est impaire
- $\forall n \geq 1$, $b_n = b_n(\tilde{h}) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(t)\sin(nt)\,dt$ — $\tilde{h}$ impaire, $\tilde{h}_{|[0,\pi]} = h$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(t)\sin(nt)\,dt}$$

On a alors $\boxed{h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) \quad \forall x \in [0,\pi]}$

Posons $u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)\, e^{-n^2 t} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x,t)$

(bien déf. car $|u_n(x,t)| \leq |b_n|$ et $\sum |b_n|$ converge)

5) Application du th. de CVU et dérivation pour m.q. u est $\mathcal{C}^\infty$

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \mathcal{C}^\infty(Q)$
- Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$

$\forall (x,t) \in [0,\pi] \times [\varepsilon, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial^{\alpha+\beta} u_n}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}(x,t) \right| \leq |b_n| \times n^\alpha \times \underbrace{1}_{|\cos(nx)| \text{ ou } |\sin nx| \text{ selon } \alpha} \times n^{2\beta} e^{-n^2\varepsilon} = \underbrace{|b_n|}_{\text{bornée car } b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} n^{\alpha+2\beta} e^{-n^2\varepsilon}$$

donc $\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{\partial^{\alpha+\beta} u_n}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} \text{ CVN donc CVU sur tout compact de } Q.}$

Par th. de CVU et dérivation, on en déduit que

- $u \in \mathcal{C}^\infty(Q)$
- $\forall (x,t) \in Q, \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{\partial u_n}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right) = 0$

donc $\boxed{u \text{ est solution du problème}}$

Unicité : (crédit Adrien Laurent)

Soient u_1, u_2 deux solutions du problème et $w = u_1 - u_2$.

Alors w vérifie (1), (2), (3) et $\boxed{w(\cdot, 0) = 0}$

On pose pour $t \in [0, +\infty[$, $e(t) = \displaystyle\int_0^\pi w^2(x,t)\,dx \geq 0$

Par théorème de dérivation sous l'intégrale ($\dfrac{\partial w}{\partial t}^2$ $\mathcal{C}^0$ et $[0,\pi]$ est compact)

e est $\mathcal{C}^1$ et

$$
\begin{aligned}
e'(t) &= 2\int_0^\pi w \frac{\partial w}{\partial t}\,dx \quad \text{) } w \text{ vérifie (2)}\\
&= 2\int_0^\pi w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,dx \\
&= \cancel{2\left[w \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=\pi}} - 2\int_0^\pi \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial w}{\partial x}\,dx
\end{aligned}
$$

$$e'(t) = -2\int_0^\pi \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

donc $e'(t) \leq 0$

$e(t) - e(0) \leq 0$

$e(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, +\infty[$

donc : $\forall t \geq 0$, $e(t) = 0 \Rightarrow \displaystyle\int_0^\pi w^2(x,t)\,dx = 0$

et $w^2 \geq 0$ et continue donc $w^2(x,t) = 0$

donc $w(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}$

donc $\boxed{u_1 = u_2 \text{ ce qui prouve l'unicité.}}$